

MODELACIÓN MATEMÁTICA DEL CRECIMIENTO DEL DIÁMETRO Y LA ALTURA DE *PINUS MAESTRENSIS* BISSE EN LA UNIDAD SILVÍCOLA GUISA

MATHEMATICAL MODELLING OF THE DIAMETER AND HEIGHT GROWING OF *PINUS MAESTRENSIS* BISSE AT THE GUISA SILVICULTURAL UNIT

LIC. LOURDES RODRÍGUEZ-SHADE,¹ ING. JOSÉ ANTONIO BRAVO-IGLESIAS,² DRA. VERENA TORRES-CÁRDENAS,¹
ING. JUAN MIGUEL MONTALVO-GUERRERO,² ING. YUNIOR ÁLVAREZ-GÓNGORA³ E ING. ODALYS MOGENA-NAVARRO⁴

¹ Instituto de Ciencia Animal. Departamento de Biomatemática. Km 47^{1/2}, San José de las Lajas,
La Habana, lrodriguez@ica.co.cu

² Instituto de Investigaciones Forestales. Calle 174 no. 1723 e/ 17 B y 17 C, Siboney, Playa,
Ciudad de La Habana

³ Estación Experimental Forestal Guisa. Carretera a Victorino Km 1^{1/2}, La Soledad, Guisa,
Granma, Cuba

⁴ Empresa Forestal Integral Bayamo. Figueredo 59 e/ General García y Céspedes, Bayamo,
Granma, Cuba

RESUMEN

La modelación matemática constituye una herramienta muy útil para la planificación y gestión de los ecosistemas forestales. Con el objetivo de predecir el comportamiento del diámetro medio y la altura media en plantaciones de *Pinus maestrensis* Bisse de la unidad silvícola Guisa, Empresa Forestal Integral Bayamo, se evaluaron 11 modelos de regresión lineal y no lineal, donde el modelo que mejor bondad de ajuste presentó para el diámetro medio fue el de Gompertz, logrando explicar una alta variabilidad con un coeficiente de determinación del 94,3% y parámetros de alta significación ($p < 0,001$), y para la altura media el modelo de Hossfeld I (modificado), con un coeficiente de determinación del 95,9% y parámetros de alta significación ($p < 0,001$). Se presentan las curvas que describen la evolución en el tiempo del incremento medio anual (IMA) y el incremento corriente anual (ICA) de esa variable.

Palabras claves: *Pinus*, modelos matemáticos, crecimiento, diámetro, altura

ABSTRACT

Mathematical modelling constitutes a very useful tool for the planning and administration of the forest ecosystems. With the objective of predicting the behavior of the mean diameter and the mean height in plantations of *Pinus maestrensis* Bisse at Guisa the Silvicultural Unit belonging to Integral Forest Enterprise Bayamo, eleven models of lineal and non-lineal regression were evaluated. The model of the best goodness of fit for the mean diameter was that of Gompertz, being able to explain high variability, with a coefficient of determination of 94.3% and parameters of high significance ($p < 0.001$), and, for the mean height, the model of Hossfeld I (modified) with a coefficient of determination of 95.9% and parameters of high significance ($p < 0.001$). The curves that describe the evolution in time of the annual mean increment (IMA), and the annual periodical increment (ICA) of this variable are provided.

Key words: *Pinus*, mathematical model, growth, diameter, height

INTRODUCCIÓN

Las funciones de desarrollo y crecimiento han sido utilizadas a lo largo de los años para proveer información y conocimiento sobre el comportamiento temporal de los datos concernientes al crecimiento de un órgano u

organismo [Kiviste *et al.*, 2002; Thornley y France, 2007].

El crecimiento biológico de un árbol o de una masa forestal es el resultado de un gran número de procesos complejos que pueden re-

presentarse de forma simplificada mediante modelos matemáticos teóricos o empíricos. El estudio del crecimiento de árboles y de bosques proporciona información de gran utilidad para los silvicultores, pues se ha convertido en una de las herramientas básicas para garantizar una adecuada planificación, manejo y renovación de los bosques [Hughell, 1990].

La modelación es una de las herramientas para establecer prácticas silviculturales factibles de aplicar a los bosques, y describir las características biológicas de la especie asociada al fenómeno del crecimiento, estimar la producción futura, determinar el turno óptimo de corta, así como comparar alternativas de manejo para analizar las mejores opciones de uso de la tierra y simular prácticas silviculturales.

El objetivo de este trabajo fue obtener los modelos matemáticos que permitirá predecir el crecimiento del diámetro medio y la altura media de *Pinus maestrensis* Bisse para lograr una adecuada planificación y manejo de la especie.

MATERIALES Y MÉTODOS

El estudio se realizó en la unidad silvícola Guisa perteneciente a la Empresa Forestal Integral Bayamo, en la provincia de Granma, que limita al norte con los municipios de Jiguaní y Bayamo, al sur y al este con la provincia de Santiago de Cuba, y al oeste con el municipio de Buey Arriba. El suelo es ferralítico rojo lixiviado, la temperatura media de 26,5°C y valores de precipitación anual de 1288 mm [Mogena et al., 2007].

Se muestrearon aleatoriamente 40 rodales no manejados silviculturalmente, en un rango de edad entre cuatro y cuarenta años. Posteriormente se levantaron 200 parcelas temporales de 500 m², se tomaron los diámetros de todos los árboles a 1,30 m sobre el nivel del suelo, y las alturas de dos árboles por cada clase diamétrica, con cuya información se calculó el diámetro medio y la altura media para cada rodal. Para el levantamiento del área y toma de los datos dasométricos se utilizó la cinta métrica de 50 m, cinta

diamétrica, brújula, hipsómetro de Suunto, GPS y machete.

Se evaluaron 11 modelos de crecimiento reportados por la literatura [Prodan et al., 1997; Casañas, 2000; Sánchez Rodríguez, 2001 y Kiviste et al., 2002].

$$\text{Hossfeld I} \quad y = \frac{t^2}{(a + bt + ct^2)}$$

$$\text{Strand} \quad y = \left[\frac{t}{a + bt} \right]^3$$

$$\text{Hossfeld IV} \quad y = \frac{t^c}{a + bt^c}$$

$$\text{Yoschida I} \quad y = \frac{t^c}{a + bt^c} - d$$

$$\text{Terazaki} \quad y = e^{\frac{a-b}{t}}$$

$$\text{Polinómica de segundo grado} \quad y = a + bt + ct^2$$

$$\text{Hossfeld I (modificado)} \quad y = \frac{t^2}{(a + bt)^2}$$

$$\text{Trull} \quad y = a + b \log(t) + c$$

$$\text{Gompertz} \quad y = ae^{-be^{(-ct)}}$$

$$\text{Logístico} \quad y = \frac{a}{(1 + be^{(-ct)})}$$

$$\text{Richards- Chapman} \quad y = a(1 - e^{(-bt)})^c$$

donde:

a, b, c, d: Parámetros a estimar

t: Tiempo o edad de los rodales

Se consideraron algunos de los criterios estadísticos desarrollados por Guerra et al.

(2003) para la selección del modelo de mejor ajuste: coeficiente de determinación (R^2), error estándar de la estimación, sesgo, error medio cuadrático (EMC), error medio en valor absoluto (EMA) y estadístico d, de Durbin-Watson.

Se calculó el incremento corriente anual (ICA) y el incremento medio anual (IMA), según Prodan *et al.* (1997).

El análisis de la información se realizó con ayuda de los programas estadísticos Statgraphics Plus versión 5.1 e Infostat versión 1.0.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En la *Tabla 1* se presentan los modelos ajustados y asociados a cada uno de los criterios seleccionados.

TABLA 1
Estadísticos de ajuste y estimaciones de los parámetros de los modelos para el diámetro medio

Modelo	R^2	Sesgo	EMC	EMA	Durban-Watson	a	b	c	d
Hossfeld I	94,3	4,4585	5,91	1,94	1,48	4,7144	-0,1265NS	0,0336	-
Hossfeld I (modificado)	91,6	-0,1740	8,33	2,25	0,86	1,1311	0,1485	-	-
Strand	92,3	-0,1267	7,64	2,13	0,95	1,2415	0,2845	-	-
Terazaki	93,3	-0,1256	6,69	2,01	1,10	3,6949	9,9254	-	-
Yoschida I	92,0	0,0014	8,74	2,21	0,88	0,0015 NS	0,0032 NS	0,2618 NS	236,34 NS
Hossfeld IV	94,3	0,0331	5,94	1,94	1,44	6,3470 NS	0,0317	2,2504	-
Polinómica de segundo grado	94,0	-5,62 E-05	6,21	1,91	1,48	-4,1582 NS	2,1296	0,0327	-
Trull	92,9	2,85 E-05	7,35	2,14	1,07	-23,8457	43,3558	-0,3802	-
Gompertz	94,3	-0,0011	5,87	1,90	1,57	29,9663	3,7009	0,1591	-
Richards-Chapman	94,3	0,0178	5,90	1,93	1,49	30,2260	0,1373	2,5110	-
Logístico	94,1	-0,0313	6,14	1,92	1,63	29,6256	10,5779	0,2140	-

NS: No significativo.

Los valores reales u observados del *Pinus maestrensis* Bisse mostraron un comportamiento similar a una curva de tipo sigmoide. Los modelos evaluados con esta característica (excepto los modelos polinómica de segundo grado y Trull), presentaron de forma general muy buenos ajustes, atendiendo a los criterios mostrados en la tabla anterior.

Todos los modelos evaluados explicaron una alta variabilidad con coeficientes muy similares; sin embargo, no todos presentaron los mejores resultados en los restantes criterios. El modelo de Gompertz fue seleccionado como el de mejor ajuste por presentar los valores más bajos en EMC, EMA y valores de sesgo y de Durbin-Watson, adecuado con todos sus parámetros significativos ($p < 0,001$). Resultados similares fueron logrados por Calvillo *et al.* (2003), en el estudio del crecimiento en diámetro de *Pinus herrerae* Mart., donde el mo-

delo Gompertz fue el más apropiado para describir el crecimiento en diámetro de la especie.

La *Fig. 1* muestra el comportamiento de los datos ajustados al modelo de Gompertz. Se observa que esta especie experimenta un crecimiento acelerado en los primeros años de edad (*Fig. 2*), dado por el peso de factores positivos como potencial biótico del individuo, actividad fotosintética, absorción de nutrientes, procesos catabólicos y anabólicos, etc. A medida que se desarrollan los árboles, las restricciones debidas a la competencia con otros organismos, procesos respiratorios y estrés, van aumentando, de tal manera que se llega a producir un cambio en su comportamiento. Aproximadamente a los treinta años de edad se forma una meseta, indicando una estabilidad del crecimiento en el tiempo, dado por el estado adulto o de madurez de la plantación.

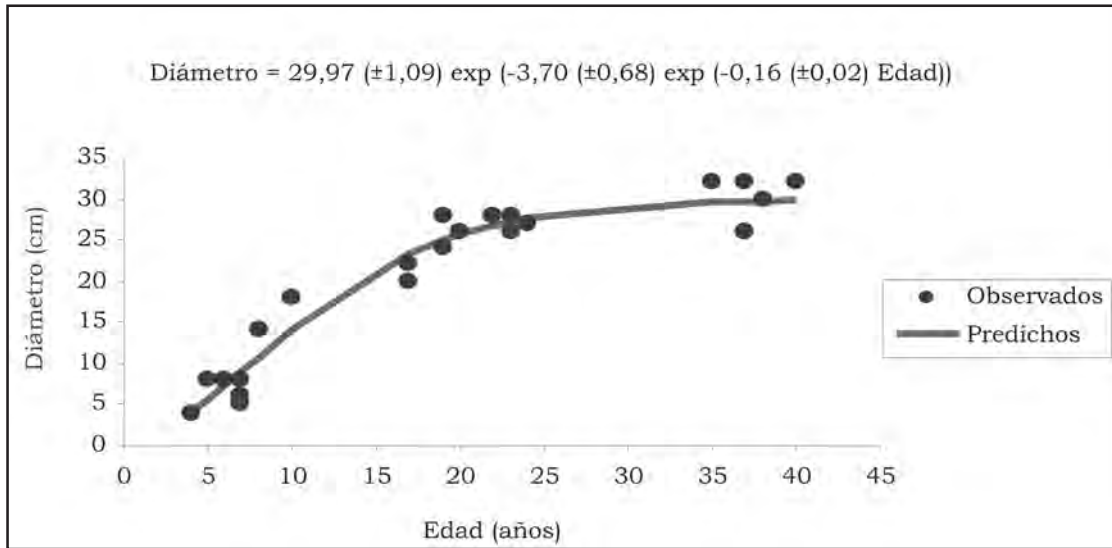


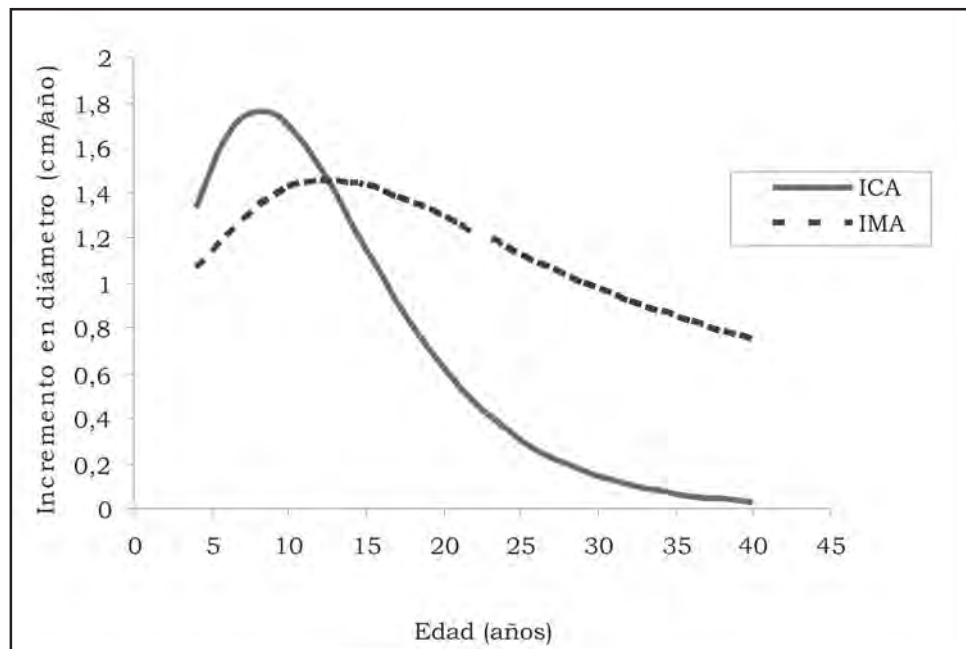
Figura 1. Modelo Gompertz ajustado al diámetro medio.

Una etapa esencial en el manejo forestal es la determinación del incremento corriente anual (ICA) y el incremento medio anual (IMA) por la relación que guardan con el crecimiento y rendimiento de los bosques. Se muestran las curvas que determinan los incrementos diamétricos estimados por el mo-

delo de Gompertz para la especie estudiada (Fig. 2) calculados por las siguientes ecuaciones:

$$\text{ICA} \quad \frac{dy}{dt} = abce^{-be^{ct}} \times e^{-ct}$$

$$\text{IMA} \quad \frac{y}{t} = \frac{ae^{-be^{-ct}}}{t}$$



ICA: Incremento corriente anual

IMA: Incremento medio anual

Figura 2. Incrementos en diámetro ajustados por el modelo de Gompertz.

El ICA muestra un rápido crecimiento en el diámetro de los rodales más jóvenes, e indica que la velocidad de crecimiento es máxima a los 8,18 años de edad con una tasa de incremento de 1,76 cm/año. Se corrobora lo planteado por Samek (1967), que en los primeros

años de edad esta especie puede alcanzar un incremento en diámetro entre 1,0 y 2,5 cm. En ese momento se produce un cambio en el comportamiento del crecimiento, y se obtiene un punto de inflexión (*Fig. 3*), definido en el modelo de Gompertz como $\ln(b)/c$.

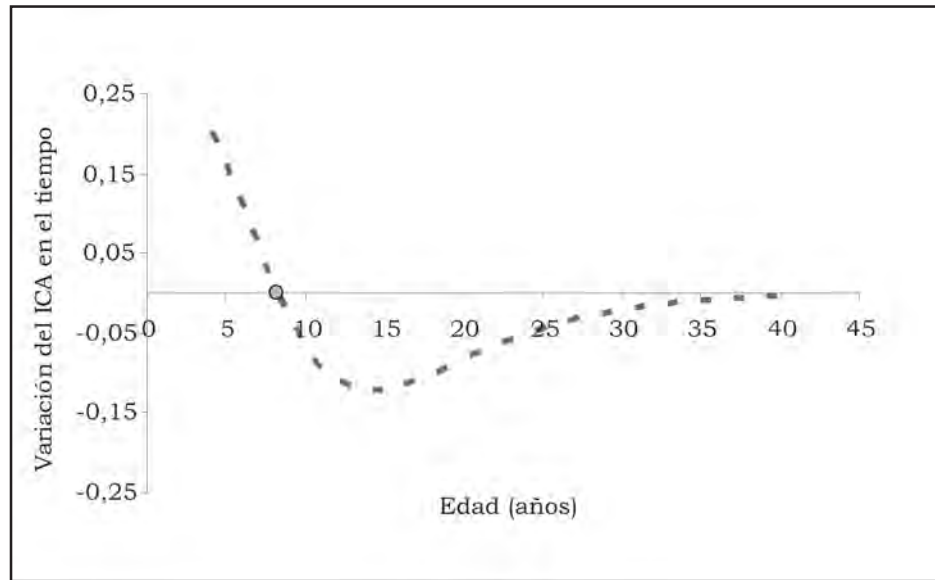


Figura 3. Punto de inflexión en el modelo de Gompertz.

A partir de este punto, el crecimiento se hace cada vez más lento, con una variación mínima alrededor de los trece años, momento en que comienza a estabilizarse el crecimiento, lo que puede estar dado por una densa cobertura arbustiva y una elevada competencia en la plantación.

El IMA representa el rendimiento alcanzado por el bosque hasta un determinado momento en el tiempo (*Fig. 2*). Durante los primeros doce años el rendimiento es menor que el crecimiento, con un diámetro promedio de 1,45 cm/año. El punto de intersección de las curvas correspondientes al ICA e IMA ocurre aproximadamente a los trece años de edad, momento en que se igualan el crecimiento y el rendimiento. La máxima expresión del potencial biológico de la especie a esta edad sugiere una definición en la estrategia de manejo silvícola para garantizar un mejor rendimiento del bosque en función de los objetivos de la producción, siendo conveniente comenzar en este momento con los primeros aclareos. La *Tabla 2* resume los resultados

de los criterios de ajuste para los modelos evaluados en la variable altura media.

Todos los modelos ajustados explicaron más del 91% de la variabilidad de la altura de los rodales. Los modelos Gompertz y Logístico presentaron los mejores resultados en todos los criterios de ajuste; sin embargo, la representación gráfica de los incrementos a través de estos modelos no describe adecuadamente la evolución de la especie en el tiempo.

Los modelos Hossfeld I, Hossfeld IV, Yoshida I, Poligámica de segundo grado, Trull y Richards-Chapman fueron los que a continuación presentaron los mejores estadísticos; mas los parámetros obtenidos no fueron significativos y tampoco permiten hacer una adecuada descripción del ICA e IMA.

El modelo Hossfeld I modificado (*Fig. 4*), aunque no presentó los mejores resultados en los criterios, fue el que describió adecuadamente la variación de los incrementos (*Fig. 5*). El estadístico de Durbin-Watson, que prueba la independencia de los residuos, reportó un

valor de 0,90, lo que denota existencia de autocorrelación de los errores. Esto puede ser analizado gráficamente a través del análisis de los residuos, los cuales indican que los errores no se encuentran distribuidos de

forma aleatoria (Fig. 6). Estos resultados no se corresponden con los obtenidos por Calvillo *et al.* (2003), donde el modelo de mejor ajuste para la variable altura fue el de Richards-Chapman.

TABLA 2
Estadísticos de ajuste y estimaciones de los parámetros de los modelos para la altura media

Modelo	R ²	Sesgo	EMC	EMA	Durbin Watson	a	b	c	d
Hossfeld I	97,9	-0,0072	1,31	0,88	1,52	-1,7569 NS	1,3501	0,0045 NS	-
Hossfeld I (modificado)	95,9	-0,2531	2,46	1,27	0,90	2,2116	0,1417	-	-
Strand	94,8	-0,3086	3,17	1,42	0,74	2,2630	0,2838	-	-
Terazaki	91,5	0,3778	5,17	1,83	0,50	3,5740	15,2205	-	-
Yoschida I	91,2	0,0008	5,39	1,56	0,54	0,0040 NS	0,0009 NS	0,0564 NS	219,15 NS
Hossfeld IV	97,9	0,0055	1,35	0,89	1,49	0,7636	-0,0014 NS	0,8163	-
Polinómica de segundo grado	97,9	0,0000	1,33	0,88	1,52	1,2736 NS	0,7129	-0,0018 NS	-
Trull	97,9	4,17 E-07	1,35	0,90	1,49	0,5236 NS	0,8312 NS	0,5863	-
Gompertz	97,9	0,0001	1,32	0,87	1,57	36,5338	2,5754	0,0523	-
Richards-Chapman	97,8	0,0464	1,43	0,89	1,44	69,2152 NS	0,0116 NS	0,9678	-
Logístico	97,9	0,0053	1,35	0,86	1,54	29,78	7,8394	0,1019	-

NS: No significativo.

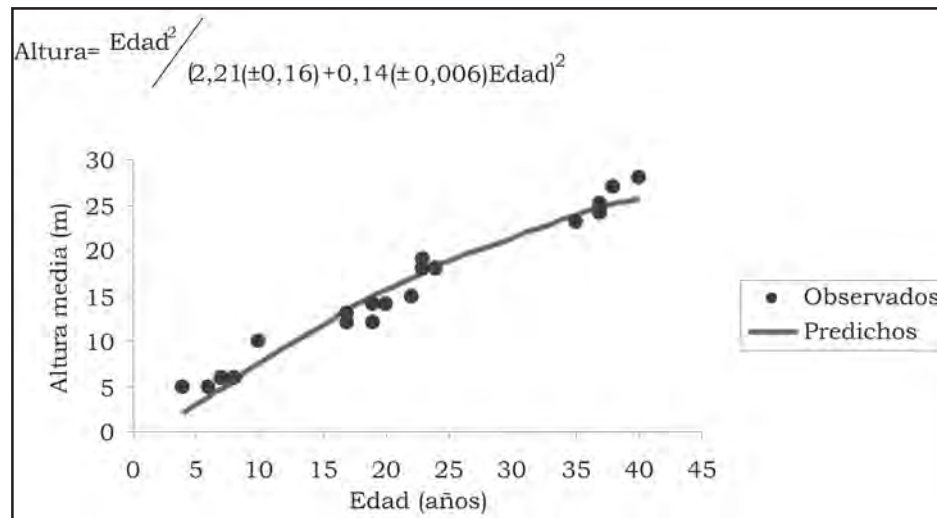


Figura 4. Modelo Hossfeld I modificado y ajustado a la altura media.

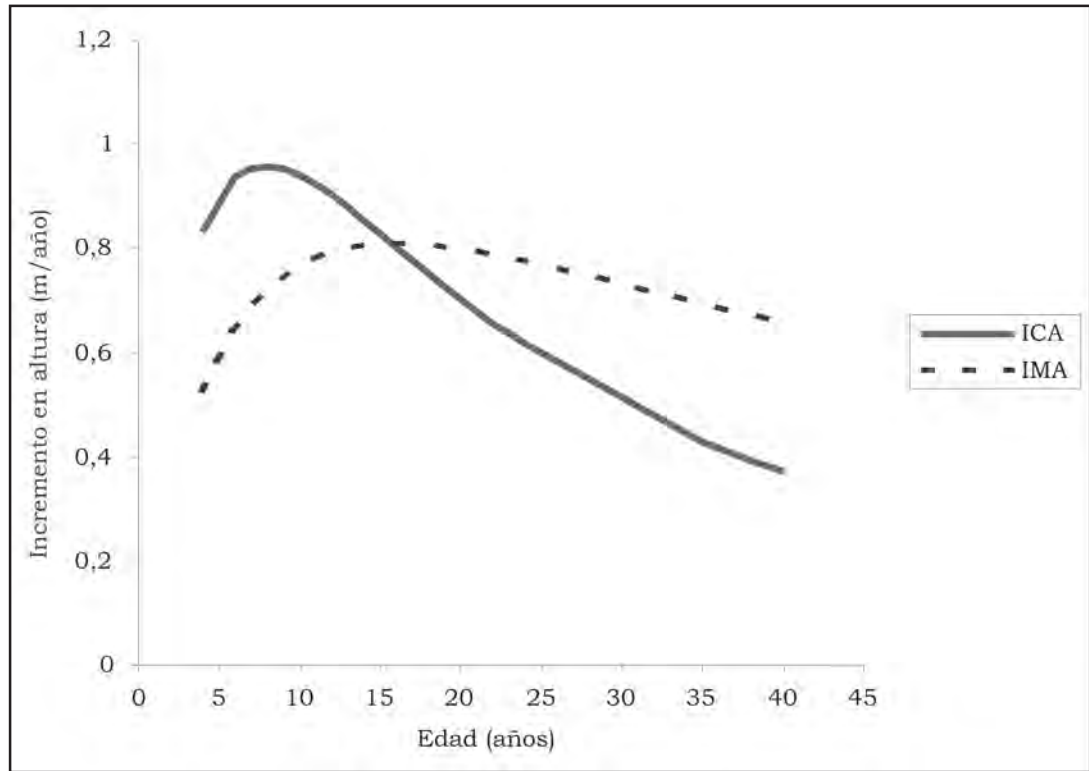


Figura 5. Incrementos en altura ajustados por el modelo Hossfeld I modificado.

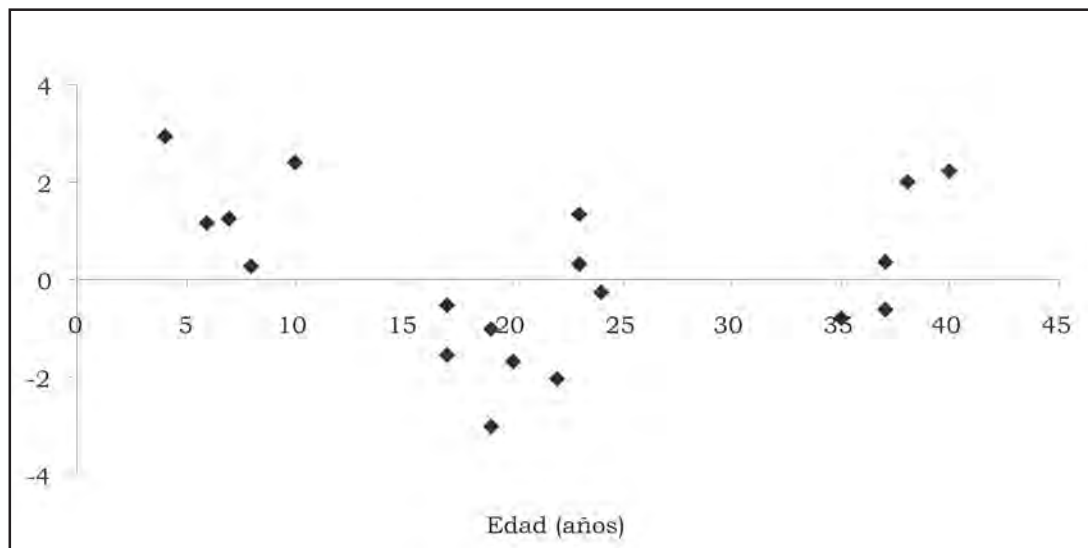


Figura 6. Análisis de los residuos del modelo Hossfeld I modificado.

La evolución en el tiempo del ICA e IMA estimados por el modelo Hoosfeld I modificado (Fig. 5) fueron calculadas por las ecuaciones siguientes:

$$\text{ICA} \quad \frac{dy}{dt} = \frac{2at}{(a + bt)^2}$$

$$\text{IMA} \quad \frac{y}{t} = \frac{t}{(a + bt)^2}$$

El ICA muestra que alrededor de los 7,9 años se produce un cambio en la velocidad de crecimiento para la altura con una tasa de variación de 0,96 m/año. A partir de esa edad el ICA comienza a disminuir, igualándose a los 15,8 años con el IMA.

A partir del punto de inflexión, la variación en altura comienza a disminuir paulatinamente con tendencia a estabilizarse alrededor de los diecisiete años de edad.

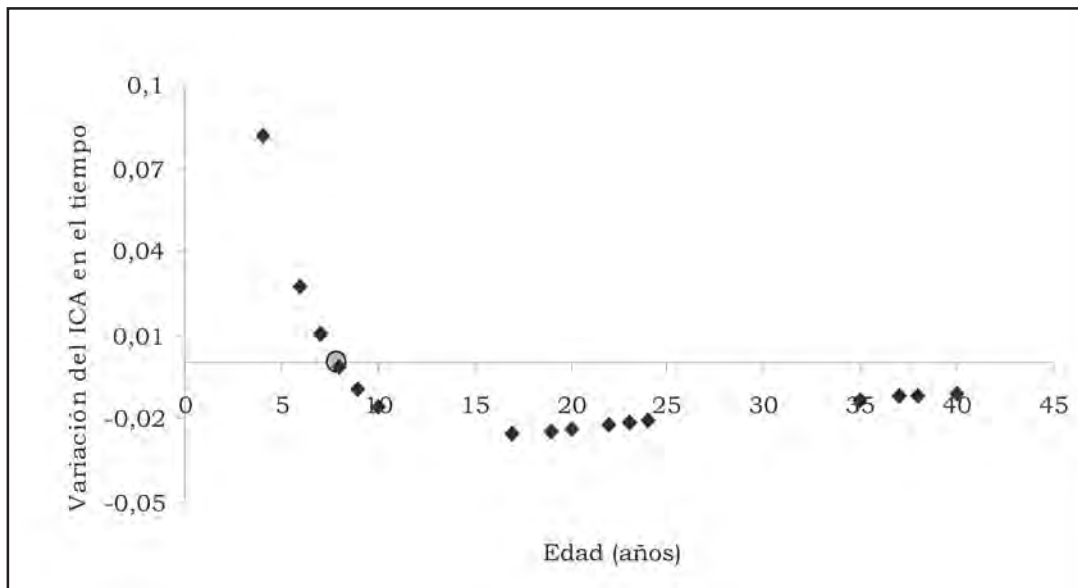


Figura 7. Punto de inflexión en el modelo Hossfeld I modificado.

CONCLUSIONES

- El modelo de Gompertz mostró el mejor ajuste para los datos de crecimiento diamétrico.
- El modelo Hoosfeld I modificado, aunque no presentó los mejores resultados en los criterios de ajuste, permitió una adecuada descripción de los incrementos en el tiempo.
- Los modelos ajustados permitirán definir el momento de ejecución de los manejos silvícolas en función del objetivo de la producción teniendo en cuenta la edad en que se igualan el IMA e ICA.

BIBLIOGRAFÍA

CALVILLO, J. C., CORNEJO, E. H., VALENCIA, S., FLORES, C. 2003. Crecimiento en altura y diámetro de árboles de *Pinus herrerae*,

Hidalgo, Michoacán, México. Disponible en: <http://www.uaaan.mx/> Consultado: [4 de Febrero, 2009]

CASAÑAS, N. 2000. *Pinus pinea* L. en el Sistema Central (Valles del Tiétar y del Alberche): Desarrollo de un modelo de gestión y producción de piña. España. 356 p. Tesis (en opción al grado científico de Doctor). Universidad de Madrid.

DI RIENZO, J.A., BALZARINI, M., CASANOVES, F., GONZÁLEZ, L., TABLADA, M., GUZMÁN, W., ROBLEDO, C.W. 2001. Software estadístico InfoStat versión 1.0 sobre Windows. Estadística y Biometría. Facultad de Ciencias Agropecuarias. Universidad Nacional de Córdoba, Argentina.

GUERRA, C. W., CABRERA, A., FERNÁNDEZ, L. 2003. Criterios para la selección de modelos estadísticos en la investigación científica. Revista Cubana de Ciencias Agrícola (CU) 37(1): 3-10.

HUGHELL, D. A. 1990. Modelos para la predicción del crecimiento y rendimiento de *Eucalyptus camaldulensis*, *Gliricidia sepium*, *Guazuma ulmifolia* y *Leucaena leucocephala* en América Central. Disponible en: <http://books.google.com.cu/> Consultado: [23 de Septiembre, 2009].

KIVISTE *et al.* 2002. Funciones de crecimiento de aplicación en el ámbito forestal. Madrid, Ministerio de Ciencia y Tecnología.

- gía. Instituto de Investigaciones y Tecnología Agraria y Alimentaria, 190 p.
- MOGENA, O., P. CUESTA, Y. RODRÍGUEZ, B. ZAMORA, B. 2006. Proyecto de Organización y Desarrollo de la Economía Forestal. 2006-2015. Granma, Empresa Forestal Integral Bayamo. 72 p.
- PRODAN, M., R. PETERS, F. COX., P. REAL. 1997. Mensura Forestal. Proyecto IICA BMZ / GTZ, Sobre Agricultura, Recursos Naturales y Desarrollo Sostenible, San José (Costa Rica), 561 p.
- SÁNCHEZ RODRÍGUEZ, F. 2001. Estudio de calidad de estación, crecimiento, producción y silvicultura de *Pinus radiata* D. Don en Galicia. España. 356p. Tesis Doctoral. Escuela Politécnica Superior de Lugo, Universidad de Santiago de Compostela.
- Software estadístico Statgraphics *Plus* versión 5.1 sobre Windows, 1995.
- THORNLEY, J.H.M., FRANCE, J. 2007. Mathematical Models in Agriculture. Quantitative methods for the plant, animal and ecological sciences. EE.UU, 136 p.

RESEÑA CURRICULAR

Lourdes Rodríguez Shade

Licenciada en Contabilidad y Finanzas, es especialista del Departamento de Biomatemática del Instituto de Ciencia Animal. Se encuentra en el programa de doctorado curricular en Biometría. Ha participado en eventos nacionales e internacionales con resultados relevantes. Obtuvo premio en el Forum Tecnológico sobre el Cambio Climático en la actividad agraria.